數學傳播 50卷2期, pp. 118-128

共邊三角形的一個有趣性質

顏廷翰 · 黃品鈞 · 蕭偉智

摘要: 本文針對平面上三角形的共邊子三角形之內切圓的半徑和旁切圓的半徑比值之乘積爲定值之結果, 提出更簡潔的證明, 並且進一步給出了優美的不變性 (定理 5 和定理 6)。

關鍵字: 共邊三角形、切圓、半徑比值之乘積。

壹、前言

平面上, 對於任意 $\triangle ABC$, 考慮 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D, 可形成兩個共邊子三角形 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$, 其中子三角形的內切圓的半徑是大家有興趣的。例如 1988 年第 29 屆國際奧林匹亞數學競賽 IMO 的預選題第 84 題目: 在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D, 使得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的內切圓的半徑相等, 則求證 $\overline{AD}^2=\triangle ABC\cdot\cot\frac{A}{2}$ (見 [2] , 第 51-52 頁)。事實上, 這個結果還可以化簡更漂亮一些, 約定長度 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, 半周長 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, 則 $\overline{AD}^2= rs\cdot\dfrac{\frac{b+c-a}{2}}{r}=s(s-a)$, 見圖 1。

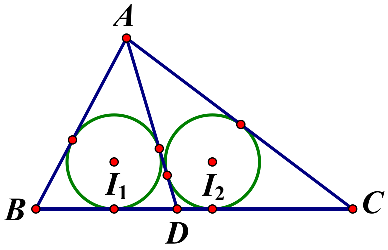

圖1: 兩個內切圓半徑等長

我們覺得此性質十分有趣, 查詢文獻後, 發現其推廣情形已經被提出, 對於任意 $\triangle ABC$, 邊 $\overline{BC}$ 邊上依序有 $n-1$ 個點爲 D_k, 其中 $k=1,2,\ldots,n-1$, 若共邊的 n 個子三角形之內切圓的半徑等長時, 則 $\cot\frac{\angle B}{2}$、$\tan\frac{\angle AD_1B}{2}$、$\ldots$、$\tan\frac{\angle AD_{n-1}B}{2}$、$\tan\frac{\angle C}{2}$ 爲等比數列 (見 [1], 第 133 頁)。

由於內切圓與旁切圓總有密切關係, 我們將共邊子三角形的旁切圓的半徑納入研究, 並且提出創見。見圖 2, 考慮內切圓的半徑與旁切圓的半徑比值之乘積, 從而得出有趣的結果。令 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中, $\triangle ABD$ 的內切圓的半徑爲 r_1, A 點所對的旁切圓的半徑爲 r_1' 並且 $\triangle ADC$ 的內切圓的半徑爲 r_2, A 點所對的旁切圓的半徑爲 r_2', 則對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點, $\frac{r_1\cdot r_2}{r_1'\cdot r_2'}$ 恆爲定值 $\frac{s-a}{s}$ (此結果見 [3] 中的定理 5)。

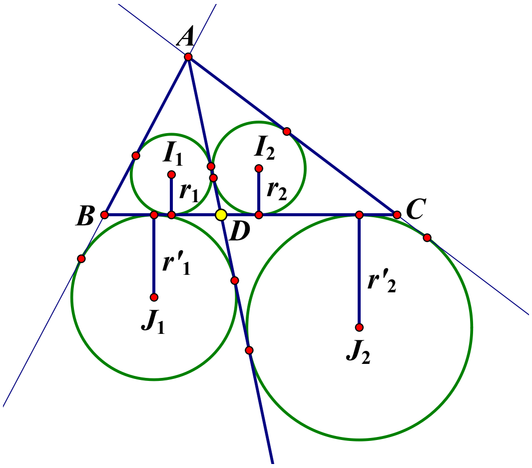

圖 2: 共邊子三角形的內切圓與旁切圓半徑

原本的證明方法較爲繁複, 後來再重新審視本性質, 發現簡潔對稱的幾何觀點之證明, 從而促成本文。

貳、內切圓和旁切圓的半徑比值之乘積

一、原本的證明

我們引入斯圖爾特定理 Stewart's theorem。

引理 1: (Stewart's theorem) 對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點, 皆有 $\overline{DC}\cdot\overline{AB}^2+\overline{DB}\cdot\overline{AC}^2=\left(\overline{DB}+\overline{DC}\right)\left(\overline{DA}^2+\overline{DB}\cdot\overline{DC}\right)$。

證明: 令 $\angle ADB=\theta$, 依據餘弦定理有

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{DA}^2+\overline{DB}^2-2\cdot\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\cos\theta\\ \overline{AC}^2&=\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-2\cdot\overline{DA}\cdot\overline{DC}\cdot\cos(180^\circ-\theta).\end{aligned}$$

將前式乘以 $\overline{DC}$, 後式乘 $\overline{DB}$ 後, 相加即可得證。 □

接著可利用斯圖爾特定理證明定理 1。

定理 1: (**見** [3], **第** 14 **頁**) 對於 $\overline{BC}$ 上的動點 D 點, $\frac{r_1\cdot r_2}{r_1'\cdot r_2'}$ 恆爲定值 $\frac{s-a}{s}$。

證明:

1. 見圖 2, 令 $\overline{DB}:\overline{DC}=(1-t):t$, 其中 $0<t<1$, 可得 $\overline{DB}=a(1-t)$ 且 $\overline{DC}=at$, 則 $\triangle ABD$ 的半周長爲 $\frac{a(1-t)+c+p}{2}$ 且 $\triangle ACD$ 的半周長爲 $\frac{at+b+p}{2}$。因爲所要證明的是半徑比值之乘積, 可不失一般性假設 $\triangle ABC$ 的面積爲 1, 從而有 $\triangle ABD$ 的面積爲 $1-t$ 且 $\triangle ADC$ 的面積爲 t。

2. 令 $\overline{AD}$ 的長度爲 p, $\triangle ABD$ 的內切圓的半徑 r_1 長度爲 $\frac{2\triangle ABD}{a(1-t)+c+p}=\frac{2(1-t)}{a(1-t)+c+p}$ 且 $\triangle ADC$ 的內切圓的半徑 r_2 長度爲 $\frac{2\triangle ACD}{at+b+p}=\frac{2t}{at+b+p}$。再討論旁切圓的半徑長度, 因 $\triangle ABD=\triangle ABJ_1+\triangle ADJ_1-\triangle BDJ_1$, 可得 $r_1'=\frac{2\triangle ABD}{-a(1-t)+c+p}=\frac{2(1-t)}{-a(1-t)+c+p}$, 同理可得 $r_2'=\frac{2t}{-at+b+p}$。

$$\begin{aligned}\frac{r_1\cdot r_2}{r_1'\cdot r_2'}&=\frac{\frac{2(1-t)}{a(1-t)+c+p}\cdot\frac{2t}{at+b+p}}{\frac{2(1-t)}{-a(1-t)+c+p}\cdot\frac{2t}{-at+b+p}}\\&=\frac{((-a(1-t)+c)+p)\,((-at+b)+p)}{((a(1-t)+c)+p)\,((at+b)+p)}\\&=\frac{(-a(1-t)+c)\,(-at+b)+p(-a+b+c)+p^2}{(a(1-t)+c)\,(at+b)+p(a+b+c)+p^2}.\end{aligned}$$

3. 依據斯圖爾特定理有:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2&=p^2=\frac{a(1-t)\cdot b^2+at\cdot c^2}{a}-a(1-t)\cdot at\\&=a^2t^2+b^2-t\left(a^2+b^2-c^2\right).\end{aligned}$$

代入並化簡, 可得:

$$\begin{aligned}\frac{r_1\cdot r_2}{r_1'\cdot r_2'}&=\frac{(-a+b+c)\,(b(1-t)+ct)+p(-a+b+c)}{(a+b+c)\,(b(1-t)+ct)+p(a+b+c)}\\&=\frac{-a+b+c}{a+b+c}=\frac{s-a}{s}.\end{aligned}$$ □

很明顯證明過程的計算較爲複雜, 但是結果卻十分簡潔! 這個結果可以作爲工具推廣到共邊的 n 個子三角形之內切圓的半徑與旁切圓的半徑的長度比值乘積, 其依舊爲定值, 這讓我們不禁懷疑是否有其他更簡潔的證明方式。

二、新的簡潔證明

我們先回到單一個三角形時, 見圖 3, $\triangle ABC$ 的內切圓 I 與 $\overline{BC}$ 切於 M 點, 不難得出 $\overline{CM}=s-c$。旁切圓 J 與 $\overline{BC}$ 切於 N 點, 注意到 $\overline{AP}=\overline{AQ}=s$, 可得 $\overline{BP}=s-c$, 從而有 $\overline{CM}=\overline{BN}$, 同理可得 $\overline{CN}=\overline{BM}$。

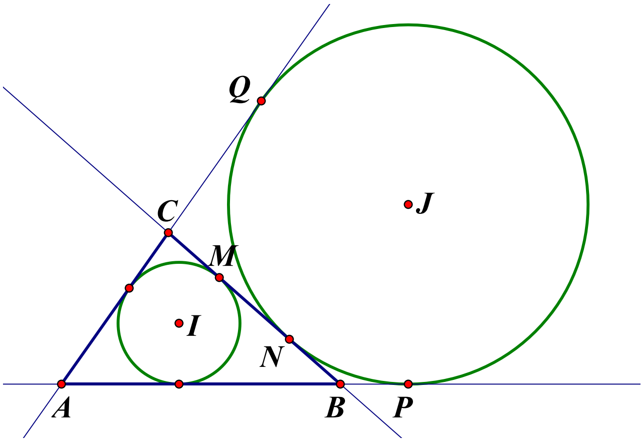

圖3: 等線段

接著討論內切圓的半徑與旁切圓的半徑的長度比值。令圖 3 中的內切圓 I 半徑爲 r, 旁切圓 J 半徑爲 r', 我們將半徑比值轉換爲角度的 tan 函數乘積。

性質 2: $\frac{r}{r'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$。

證明: 見圖 4, $\triangle CMI$ 相似於 $\triangle JNC$ (AA 相似), 從而有 $\overline{MI}:\overline{CN}=\overline{CM}:\overline{JN}$, 即 $\overline{CN}\cdot\overline{CM}=r\cdot r'$。考慮 $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{\overline{BM}}\cdot\frac{r}{\overline{CM}}$, 又因爲 $\overline{BM}=\overline{CN}$, 所以 $\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{r^2}{\overline{CN}\cdot\overline{CM}}=\frac{r^2}{r\cdot r'}=\frac{r}{r'}$。 □

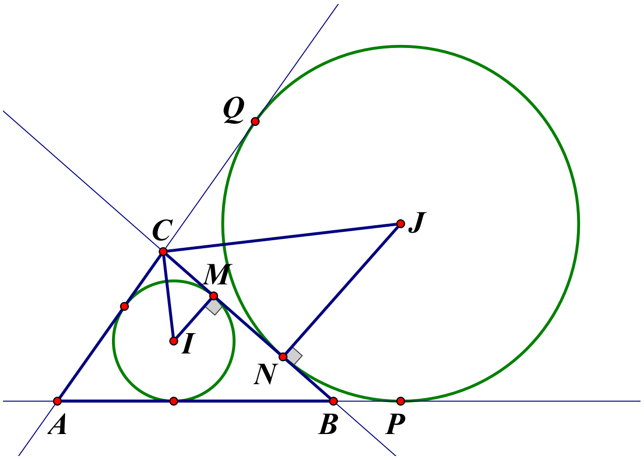

圖 4: 相似三角形

至此, 我們重新回到定理 1。

在 $\triangle ABD$ 中,

$$\frac{r_1}{r_1'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle ADB}{2}.$$

在 $\triangle ADC$ 中,

$$\frac{r_2}{r_2'}=\tan\frac{\angle ADC}{2}\tan\frac{\angle C}{2}.$$

因爲 $\frac{\angle ADB}{2}+\frac{\angle ADC}{2}=90^\circ$, 從而有:

$$\frac{r_1\cdot r_2}{r_1'\cdot r_2'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}.$$

此結論展現了簡潔且對稱的形式!

再根據常見的等式 $\tan\frac{\angle B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ 與 $\tan\frac{\angle C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$, 即可得 $\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{s-a}{s}$。

令任意 $\triangle ABC$ 中, 邊 $\overline{BC}$ 邊上依序有 $n-1$ 個點爲 D_k, 其中 $k=1,2,\ldots,n-1$。對於 n 個共邊子三角形 $\triangle ABD_1$、$\triangle AD_1D_2$、$\ldots$、$\triangle AD_{n-2}D_{n-1}$、$\triangle AD_{n-1}C$ 之內切圓的半徑依序爲 r_1、r_2、$\ldots$、r_{n-1}、r_n, 旁切圓的半徑依序爲 r_1'、r_2'、$\ldots$、r_{n-1}'、r_n', 在文獻 [3] 中, 利用數學歸納法去證明一般化的半徑比值之乘積爲定值 (見 [3], 第 27 頁), 然而利用本文的性質 2 則可更直觀證明。

定理 3: $\frac{r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{n-1}\cdot r_n}{r_1'\cdot r_2'\cdot\ldots\cdot r_{n-1}'\cdot r_n'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$。

證明: 根據性質 2 有 $\frac{r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{n-1}\cdot r_n}{r_1'\cdot r_2'\cdot\ldots\cdot r_{n-1}'\cdot r_n'}=\left(\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle AD_1B}{2}\right)\cdot\left(\tan\frac{\angle AD_1D_2}{2}\ \tan\frac{\angle AD_2D_1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\tan\frac{\angle AD_{n-2}D_{n-1}}{2}\tan\frac{\angle AD_{n-1}D_{n-2}}{2}\right)\cdot\left(\tan\frac{\angle AD_{n-1}C}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)$, 又因爲 $\frac{\angle AD_1B}{2}+\frac{\angle AD_1D_2}{2}=\frac{\angle AD_2D_1}{2}+\frac{\angle AD_2D_3}{2}=\ldots=\frac{\angle AD_{n-1}D_{n-2}}{2}+\frac{\angle AD_{n-1}C}{2}=90^\circ$, 所以 $\tan\frac{\angle AD_1B}{2}\tan\frac{\angle AD_1D_2}{2}=\tan\frac{\angle AD_2D_1}{2}\tan\frac{\angle AD_2D_3}{2}=\ldots=\tan\frac{\angle AD_{n-1}D_{n-2}}{2}\tan\frac{\angle AD_{n-1}C}{2}=1$, 從而有 $\frac{r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{n-1}\cdot r_n}{r_1'\cdot r_2'\cdot\ldots\cdot r_{n-1}'\cdot r_n'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$。 □

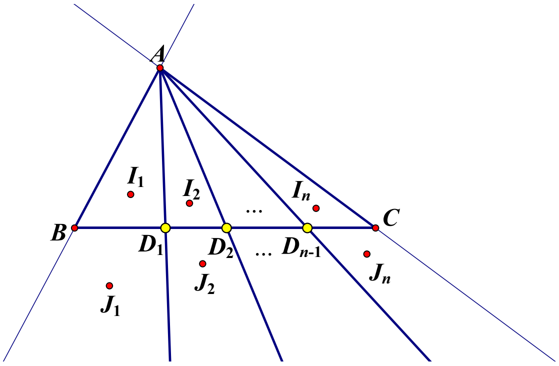

圖5: n 個共邊子三角形

圖 6 的三個共邊三角形, 根據性質 2 有 $\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r_1'\cdot r_2'\cdot r_3'}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{s-a}{s}$, 然而比較有趣的是 $\triangle ABD_2$ 和 $\triangle AD_2C$ 是一組共邊三角形, $\triangle ABD_1$ 和 $\triangle AD_1C$ 也是一組共邊三角形, $\triangle ABD_2$ 與 $\triangle AD_1C$ 重疊了 $\triangle AD_1D_2$, 在此情形下, 內切圓的半徑與旁切圓的半徑的長度比值乘積的定值還存在嗎?

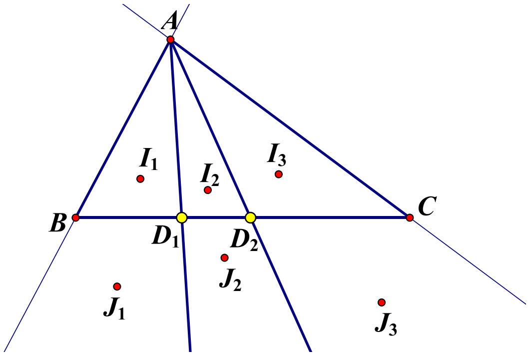

圖 6: 重疊的共邊子三角形

以下爲了方便表示, 我們約定 r_{BC} 表示 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑, r'_{BC} 表示 $\triangle ABC$ 的 A 點所對的旁切圓的半徑。討論兩個重疊三角形的半徑比值之乘積 $\frac{r_{BD_2}\cdot r_{D_1C}}{r'_{BD_2}\cdot r'_{D_1C}}$, 如下:

$$\frac{r_{BD_2}\cdot r_{D_1C}}{r'_{BD_2}\cdot r'_{D_1C}}=\frac{r_{BD_2}}{r'_{BD_2}}\cdot\frac{r_{D_1C}}{r'_{D_1C}}=\left(\frac{r_{BD_1}}{r'_{BD_1}}\cdot\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\right)\left(\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\cdot\frac{r_{D_2C}}{r'_{D_2C}}\right).$$

從而可得出定值:

$$\frac{r_{BD_2}\cdot r'_{D_2D_1}\cdot r_{D_1C}}{r'_{BD_2}\cdot r_{D_2D_1}\cdot r'_{D_1C}}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{s-a}{s}.$$

有趣的是, 我們可將其看作 D_1 和 D_2 點是錯序的, 而得出圖 7 的實線圓的半徑乘積與虛線圓的半徑比值之乘積爲定值 $\frac{s-a}{s}$。

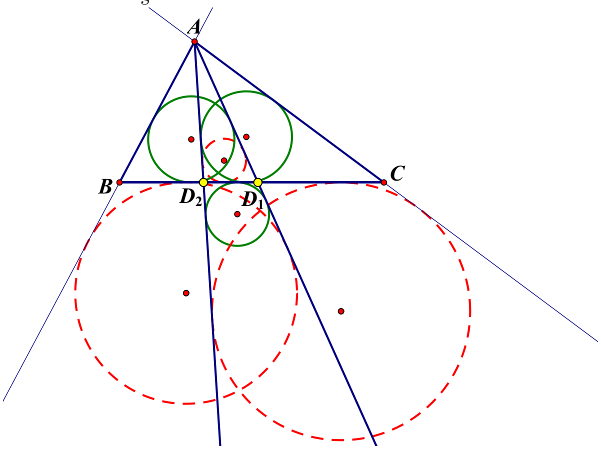

圖 7: 半徑比值之乘積

以此觀點則可以找出半徑比值之乘積爲定值的情形, 見圖 8, $\overline{BC}$ 邊上有 D_1、D_2、D_3 三點, 其排列次序共有六種。每一種情形都有四個共邊三角形, 實線圓的半徑乘積與虛線圓的半徑比值之乘積恆爲定值 $\frac{s-a}{s}$, 其中當 $\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同向時, 實線圓是 $\triangle AD_kD_{k+1}$ 的內切圓, 虛線圓爲 $\triangle AD_kD_{k+1}$ 的旁切圓; $\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反向時則兩者相反。

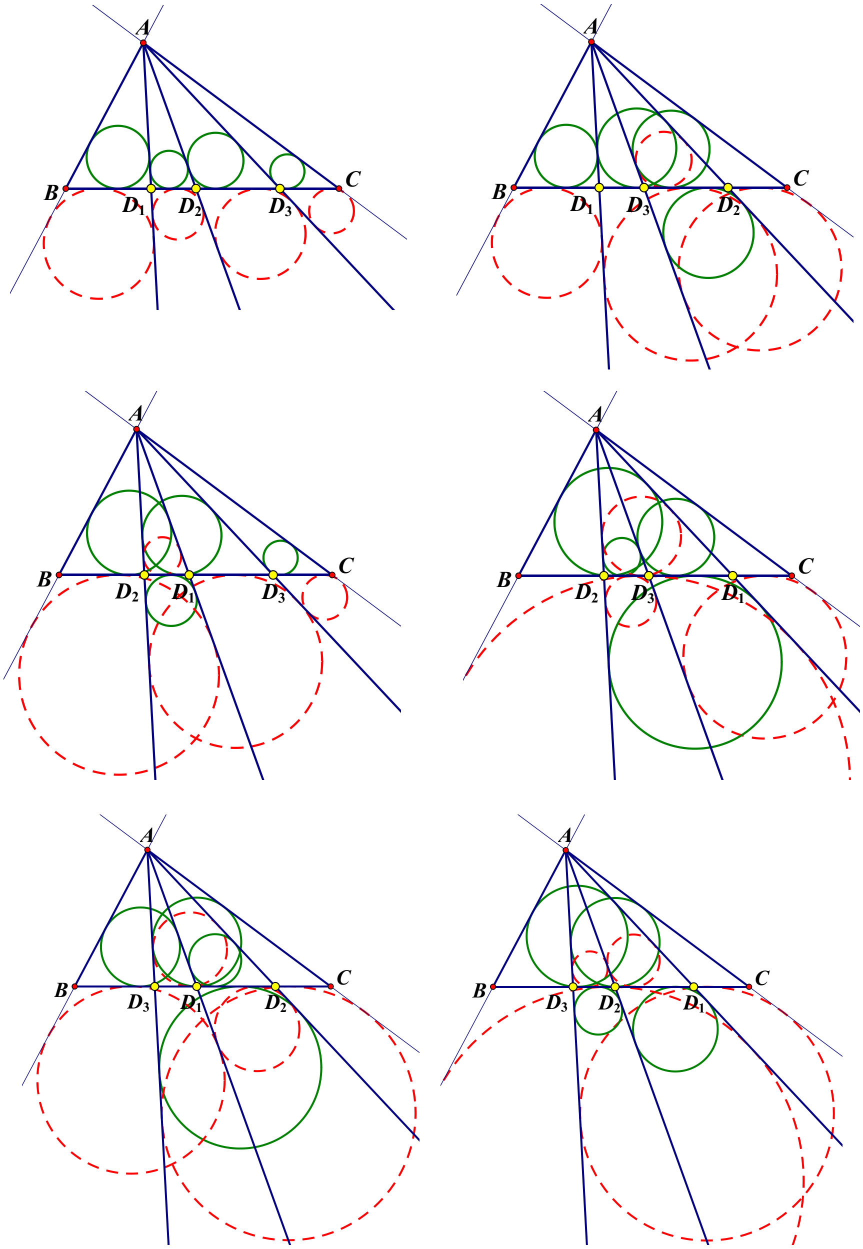

圖 8: 六種半徑比值之乘積爲定值

我們繼續將這個發現推廣到一般化的情形, $\overline{BC}$ 邊上有無論其排列次序的 $n-1$ 個相異點 D_1、D_2、...、D_{n-1}。

定義 4: $\overline{BC}$ 邊上有相異點 X 與 Y, 約定一個有向的比值函數符號爲 $R(X,Y)$。當向量 $\overrightarrow{XY}$ 與向量 $\overrightarrow{BC}$ 同向時, 定義 $R(X,Y)=\frac{r_{XY}}{r'_{XY}}$, 即 $\triangle AXY$ 的內切圓半徑與旁切圓半徑的比值; 當向量 $\overrightarrow{XY}$ 與向量 $\overrightarrow{BC}$ 反向時, 定義 $R(X,Y)=\frac{r'_{XY}}{r_{XY}}$, 即 $\triangle AXY$ 的旁切圓半徑與內切圓半徑的比值。

再由性質 2 可知:

$$\frac{r_{XY}}{r'_{XY}}=\tan\frac{\angle AXY}{2}\tan\frac{\angle AYX}{2},$$
$$\frac{r'_{XY}}{r_{XY}}=\frac{1}{\tan\frac{\angle AXY}{2}\tan\frac{\angle AYX}{2}}=\cot\frac{\angle AXY}{2}\cot\frac{\angle AYX}{2}.$$

定理 5: 無論 D_1、D_2、...、D_{n-1} 的排列次序, 皆有 $R(B,\ D_1)\cdot\ R(D_1,\ D_2)\cdot\ R(D_2,\ D_3)\cdot\ldots\cdot R(D_{n-1},\ C)$ 爲定值 $\frac{s-a}{s}$。

證明: 討論任一交界點 D_k, 當向量 $\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ 與向量 $\overrightarrow{D_{k-1}D_k}$ 同向時, 相鄰的 $\angle AD_kD_{k-1}$ 與 $\angle AD_kD_{k+1}$ 的角度會互補, 可得

$$\tan\frac{\angle AD_kD_{k-1}}{2}\tan\frac{\angle AD_kD_{k+1}}{2}=1\ (\text{或}\ \cot\frac{\angle AD_kD_{k-1}}{2}\cot\frac{\angle AD_kD_{k+1}}{2}=1);$$

當向量 $\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$ 與向量 $\overrightarrow{D_{k-1}D_k}$ 反向時, 相鄰的 $\angle AD_kD_{k-1}$ 與 $\angle AD_kD_{k+1}$ 的角度會相等, 可得

$$\tan\frac{\angle AD_kD_{k-1}}{2}\cot\frac{\angle AD_kD_{k+1}}{2}=1\ (\text{或}\ \cot\frac{\angle AD_kD_{k-1}}{2}\tan\frac{\angle AD_kD_{k+1}}{2}=1),$$

其中 $k=1,2,\ldots,n-1$, 這裡約定點 D_0 爲 B 點, D_n 爲 C 點。

考慮有向比值連乘積 $R(B,\ D_1)\cdot\ R(D_1,\ D_2)\cdot\ R(D_2,\ D_3)\cdot\ldots\cdot R(D_{n-1},\ C)$, 將其各項展開爲半角正切函數 (同向) 或半角餘切函數 (反向), 介於中間的交界點 D_k 所產生的乘積皆相消爲 1, 從而有:

$$R(B,\ D_1)\cdot R(D_1,D_2)\cdot R(D_2,D_3)\cdots R(D_{n-1},\ C)=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{s-a}{s}.\quad\square$$

三、對三頂點輪換作圖

見圖 9-1, 考慮平面上 $\triangle ABC$ 內部的任意動點 P, $\overrightarrow{AP}$ 將 $\triangle ABC$ 分割爲兩個共邊子三角形 $\triangle ABD_A$ 與 $\triangle ACD_A$, 分別作其內切圓 I_{A_1}、I_{A_2} 與其對應旁切圓 J_{A_1}、J_{A_2}, 約定前述內切圓半徑爲 r_{A_1}, 旁切圓半徑爲 r'_{A_1}, 其餘以此類推。

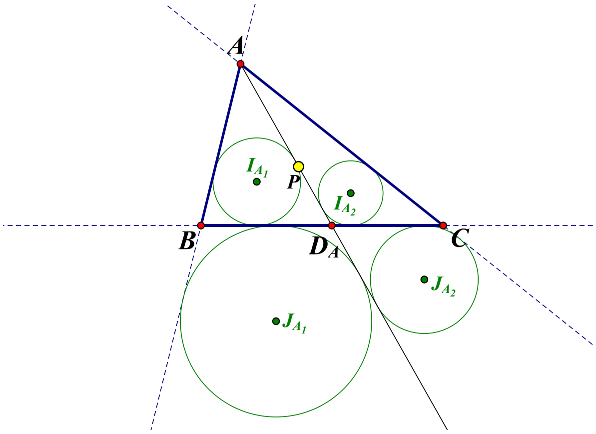

圖 9-1: 給定 P 點進行分割

繼續作出另外兩個頂點對應的分割線 $\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{CP}$ 所構造共邊子三角形之內切圓與旁切圓, 見圖 9-2 所示。

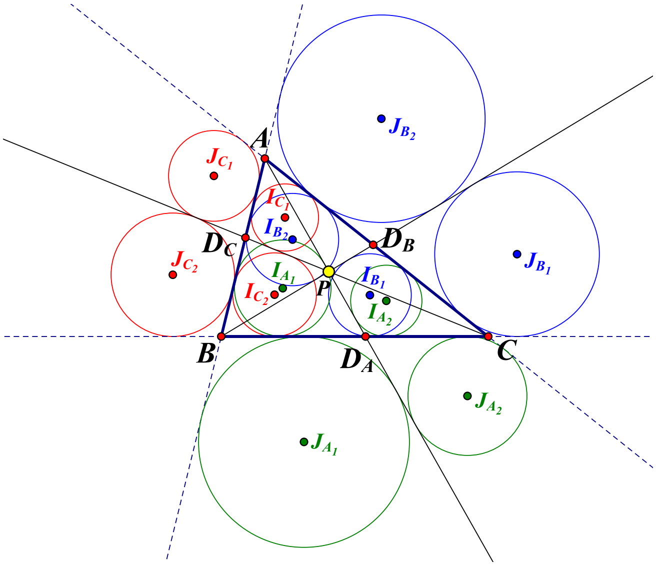

圖 9-2: 對三頂點輪換作圖

定理 6: $\dfrac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}\cdot r_{B_1}\cdot r_{B_2}\cdot r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}\cdot r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}\cdot r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}=\big(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\big)^2$。

證明: 關於 $\overline{BC}$ 邊時, 根據性質 2 可得 $\frac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}}=\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$, 同理得出 $\frac{r_{B_1}\cdot r_{B_2}}{r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}}=\tan\frac{\angle C}{2}\tan\frac{\angle A}{2}$ 以及 $\frac{r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}=\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}$, 因此得出

$$\frac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}\cdot r_{B_1}\cdot r_{B_2}\cdot r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}\cdot r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}\cdot r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}=\left(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)^2. \qquad \square$$

值得一提的是, 當固定 $\triangle ABC$, 由於 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 爲固定內角, 上述乘積之值顯然僅取決於三角形本身的形狀, 從而無論點 P 在三角形內部如何移動, 其對應的 6 個子三角形半徑比值之乘積恆爲定值。

那麼當 $\triangle ABC$ 改變時, $\dfrac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}\cdot r_{B_1}\cdot r_{B_2}\cdot r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}\cdot r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}\cdot r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}$ 的最大值是什麼呢?

定理 7: $\dfrac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}\cdot r_{B_1}\cdot r_{B_2}\cdot r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}\cdot r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}\cdot r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}\le\dfrac{1}{27}$。

證明: $\angle A$、$\angle B$ 與 $\angle C$ 爲三角形的三內角, 可得 $\tan\frac{\angle A}{2}$、$\tan\frac{\angle B}{2}$ 與 $\tan\frac{\angle C}{2}$ 皆爲正數。由算術幾何平均不等式 (AM–GM) 有:

$$\sqrt[3]{\left(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)^2}\le\frac{\left(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\right)+\left(\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)+\left(\tan\frac{\angle C}{2}\tan\frac{\angle A}{2}\right)}{3}$$

利用和角公式

$$\tan\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\angle A}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}}{1-\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}},$$

又 $\tan\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}\right)=\cot\frac{\angle C}{2}$, 所以 $\frac{\tan\frac{\angle A}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}}{1-\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\angle C}{2}}$, 即可得出漂亮的結果:

$$\left(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\right)+\left(\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)+\left(\tan\frac{\angle C}{2}\tan\frac{\angle A}{2}\right)=1.$$

於是我們就有:

$$\sqrt[3]{\left(\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\right)^2}\le\frac{1}{3},$$

故 $\dfrac{r_{A_1}\cdot r_{A_2}\cdot r_{B_1}\cdot r_{B_2}\cdot r_{C_1}\cdot r_{C_2}}{r'_{A_1}\cdot r'_{A_2}\cdot r'_{B_1}\cdot r'_{B_2}\cdot r'_{C_1}\cdot r'_{C_2}}\le\dfrac{1}{27}$ ($\triangle ABC$ 爲正三角形時, 等號成立)。 □

參、結語

本文針對平面上三角形的共邊子三角形之內切圓的半徑和旁切圓的半徑, 其所構成的半徑比值之乘積的性質進行探討。在文獻 [3] 分開計算了內切圓的半徑長度, 以及旁切圓的半徑長度, 隨後再進行化簡, 結果十分簡潔, 但過程繁瑣, 於是我們重新審視此問題以及提出更簡潔的證明方式, 本文不去計算半徑長度, 而是直接考慮單一個三角形的內切圓與旁切圓的半徑長度比值, 從而發現對稱之美, 再利用對稱性解決了原問題, 讓此問題的幾何本質凸顯出來。後續探討 $\overline{BC}$ 邊上的分割點 D_1、D_2、$\ldots$、D_{n-1} 在任意排序下, 仍存在半徑比值之乘積的不變性。最後我們也對三頂點進行輪換作圖, 並給出有趣的結論。

本文最後, 我們感謝審稿者提出寶貴的修改建議, 使本文內容得以更臻完善, 其中我們重新論述與強調了本文的定理 5 和定理 6。

參考文獻

1. Paul Yiu. *Euclidean Geometry*, available at `https://reurl.cc/VWvgGQ`, 1998.
2. 單墫, 胡大同。數學奧林匹克第28、29屆國際數學競賽預選題。臺北市: 九章出版社, 1989 年。
3. 顏廷翰, 黃品鈞。分割子三角形的內切圓與旁切圓之新性質。2024 年臺灣國際科學展展會數學科作品, 2024 年。

—本文作者顏廷翰、黃品鈞投稿時爲臺北市立建國高級中學高二學生, 蕭偉智任教於新北市立文山國民中學—

勘誤表

第 37 卷 2 期, 第 95 頁 line -8。

原爲：則有四邊形 $EFGH$

應爲：則四邊形 $EFGH$

第 39 卷 2 期, 第 94 頁內文 line -1。

原爲：是均

應爲：均是

第 39 卷 2 期, 第 96 頁內文 line 1。

原爲：如圖2

應爲：如圖二

第 39 卷 2 期, 第 96 頁內文 line -8。

原爲：對圖1

應爲：對圖一

第 46 卷 1 期, 第 33 頁 line -1。

原爲：本文的目的是沿續陳教授的工作將解

應爲：本文的目的是延續陳教授的工作將解

第 47 卷 2 期, 第 37 頁 line 6。

原爲：

$$\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

應爲：

$$\int_{-1}^{0}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$